

ПРИЛОЖЕНИЕ

О РАБОТЕ А. Я. ХИНЧИНА

А. М. Молчанов

(Научно-исследовательский вычислительный центр
АН СССР, Пущино)

В трудное военное время вышла небольшая книга Александра Яковлевича Хинчина «Математические основания статистической механики» — ныне библиографическая редкость.

Эта книга намечала глубокий синтез вероятностных и детерминистических идей в термодинамике — одной из самых неясных областей математического естествознания. Даже сейчас наука в этом направлении продвинулась мало — так труден этот синтез. На первые послевоенные годы приходится попытка (к сожалению, незавершенная) осуществления Александром Яковлевичем намеченной им программы. Наиболее полно он изложил свои взгляды в курсе лекций, прочитанных весной 1950 г. Мне посчастливилось слушать этот замечательный курс. Перед читателем лежат мои записи этих лекций. Единственное изменение — устранение чисто личного элемента. Я считаю невозможной любую другую обработку, несмотря на очевидные недостатки студенческого восприятия, — нельзя рисковать внесением сегодняшней точки зрения в единственный, как это ни грустно, источник наших знаний об этом уникальном курсе лекций.

Две причины делают работу А. Я. Хинчина особенно актуальной именно сейчас: 1) биология вынуждает математиков выйти за ограниченные рамки только механических систем; 2) современная вычислительная техника позволяет решать задачи, казавшиеся совершенно неприступными еще тридцать лет назад.

Уточним эти замечания.

Закону Больших Чисел повезло на общественное внимание. О нем часто говорят и пишут, хотя значительно реже понимают. Еще Анри Пуанкаре писал, что математики считают его¹ экспериментальным фактом, а физики думают, что все это доказано математиками. В подобной ситуации необходима ясность, и заслуга А. Я. Хинчина состоит в расширении и уточнении математической основы закона больших чисел. Александр Яковлевич показал, что закон больших чисел может быть сформулирован как теорема математического анализа (из которой, к слову сказать, несложно

¹ Речь шла об одном из аспектов закона больших чисел — нормальном распределении.

вывести его традиционное вероятностное истолкование). Эта формулировка настолько проста и глубока, что заслуживает широкой популяризации.

Пусть в пространстве X :

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

состоящем из большого числа n ($n \gg 1$) одинаковых компонент x , задана² сумматорная (сумма «одинаковых» слагаемых) функция $H(x)$:

$$H(x) = h(x_1) + h(x_2) + \dots + h(x_n).$$

Тогда любая другая сумматорная функция $\mathcal{A}(x)$:

$$\mathcal{A}(x) = a(x_1) + a(x_2) + \dots + a(x_n)$$

является (асимптотически при $n \rightarrow \infty$) функцией основной H :

$$\mathcal{A}(x) \approx A(H).$$

Теорема Хинчина утверждает, следовательно, что с увеличением числа компонент некоторые свойства (далеко не все!) системы упрощаются, а не усложняются.

Отметим важные особенности этого подхода.

Элементы. Система может состоять из любых компонент — газ из молекул, галактика из звезд, орган из клеток, лес из деревьев.

Детерминизм. Схема применима не только к статистическим (вероятностным), но и чисто детерминистическим системам. Суть дела в характере задаваемых вопросов.

Нелинейность-аддитивность. Элементы системы нелинейны. Система в целом аддитивна (сумматорность!) по элементам.

Целостность. Упрощаются (при $n \rightarrow \infty$) свойства системы в целом, при сколь угодно сложном строении (или поведении) составляющих элементов.

Однако все эти достоинства могут проявиться только при фактическом построении асимптотической зависимости $\mathcal{A} = A(H)$. Из работы Хинчина читатель узнает, что для этого необходимо вычислять кратные интегралы, к тому же зависящие от параметра (а то и от нескольких). Эта задача трудна даже для современных ЭВМ, а во время Хинчина (всего лишь тридцать лет назад) эта трудность была попросту непреодолима. Можно было рассчитывать только на те редкие (хотя и очень важные) случаи — формула Планка, распределение Максвелла, когда возможно аналитическое интегрирование.

Укажем в заключение главную причину опубликования работы Хинчина именно в данном сборнике.

² Функция $H(x)$ должна быть в определенном смысле положительной. Точные условия сформулированы в основном тексте.

Переходы через критические, экстремальные состояния биологических систем во многих отношениях напоминают фазовые переходы. Сами биологические системы обычно состоят из большого числа одинаковых, существенно нелинейных элементов. Однако математические методы, используемые при изучении этих систем, все еще находятся на уровне кинетической теории газов. Неудивительно поэтому, что достижения настолько скромны, что подрывают доверие серьезных биологов к самой идее сотрудничества с математиками. Важно поэтому обратить внимание научной общественности, особенно молодежи, на перспективный, хотя и весьма трудный, путь построения и исследования математических моделей сложных биологических объектов и явлений.